

Licence mention Mathématiques - Deuxième année - Semestre 4
Probabilités élémentaires
Corrigé du devoir 2

Exercice 1 - Histoire de QCM

Partie I

1) a) On suppose construit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adapté à l'expérience étudiée.

Il est clair que N est à valeurs dans $\Omega_N = \{n, -p\}$, et que $P(N = n) = \frac{1}{3}$ et $P(N = -p) = \frac{2}{3}$.

b) On a $E(N) = nP(N = n) + (-p)P(N = -p) = \frac{n-2p}{3}$. Ainsi, $E(N) = 0$ si et seulement si $n = 2p$.

2) On peut considérer que le candidat répète $n = 4$ fois la même expérience "répondre au hasard à une question" au cours de laquelle l'événement A "répondre correctement" a la probabilité $p = \frac{1}{3}$ de se réaliser. Ainsi, la variable aléatoire X égale au nombre de réponse correctes, c'est-à-dire au nombre de réalisations de A , suit la loi Binomiale $B(n, p) = B(4, \frac{1}{3})$.

On a alors $P(X = 3) = C_4^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \simeq 0,0988$.

Partie II

1) Réponse 3 : 110. En effet, il y a $C_{10}^3 = 120$ paquets différents, dont $C_5^3 = 10$ paquets ne contenant que des jetons ayant un numéro impair, et donc $120 - 10 = 110$ paquets contenant au moins un jeton ayant un numéro pair.

2) Réponse 2 : 0,25. En effet,
 $0,65 = 1 - P(\overline{A \cup B}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 - P(A \cap B)$, d'où $P(A \cap B) = 0,25$.

3) Réponse 1 : $\frac{2}{3}$. En effet, $P(B/A) = P^A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, et donc $P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P^A(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

4) Réponse 2 : $\sqrt{\frac{3}{2}}$. En effet, $E(X) = \sum x_i p_i = 2$, $E(X^2) = \sum x_i^2 p_i = \frac{11}{2}$,
 $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{2}$, et donc $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2 - Problème de pannes (première partie)

Première partie : cas discret.

A. Loi de survie et coefficient d'avarie.

1) Pour tout entier naturel n non nul, on a $(T > n-1) = (T = n) \cup (T > n)$, cette réunion étant disjointe, donc $P(T > n-1) = P(T = n) + P(T > n)$, et $P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n) = D(n-1) - D(n)$.

Comme $\pi_n = P(T = n / T > n-1) = \frac{P((T = n) \cap (T > n-1))}{P(T > n-1)} = \frac{P(T = n)}{P(T > n-1)}$, on en déduit que
$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}.$$

2) On suppose que p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et que T suit la loi géométrique de paramètre p .

a) Rappelons le résultat suivant :

$$\text{pour tout réel } x \text{ de }]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Comme $1-p$ est dans $]0, 1[\subset]-1, 1[$, on a

$$E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(T=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} = p \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

b) Pour tout entier naturel n , on a

$$D(n) = P(T > n) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (T=k)\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p \times (1-p)^n \times \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

c) De 1) et 2b), on déduit que pour tout entier naturel n non nul,

$$\pi_n = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)} = \frac{(1-p)^{n-1} - (1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} = \frac{(1-p)^{n-1}(1-(1-p))}{(1-p)^{n-1}} = p.$$

3) Réciproquement, on suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel n non nul, $\pi_n = \alpha$.

a) De 1), on déduit que pour tout entier naturel n non nul,

$$\pi_n = \alpha = \frac{D(n-1) - D(n)}{D(n-1)}, \text{ et donc } \alpha D(n-1) = D(n-1) - D(n), \text{ c'est-à-dire } D(n) = (1-\alpha)D(n-1).$$

b) Ainsi, la suite $(D(n))$ est géométrique, de raison $r = 1 - \alpha$, et de premier terme

$D(0) = P(T > 0) = 1$. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$D(n) = D(0)r^n = 1 \times (1-\alpha)^n = (1-\alpha)^n.$$

c) De 1) on déduit alors que pour tout entier naturel n non nul,

$$P(T=n) = D(n-1) - D(n) = (1-\alpha)^{n-1} - (1-\alpha)^n = (1-\alpha)^{n-1}(1-(1-\alpha)) = \alpha(1-\alpha)^{n-1}, \text{ c'est-à-dire que } T \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \alpha.$$

B. Nombre moyen de pannes successives dans un cas particulier.

1) a) On a $E(T) = 1P(T=1) + 2P(T=2) = p + 2(1-p) = 2-p$.

b) Remarquons d'abord pour tout entier naturel n non nul,

$$r_n = E(R_n) = 0P(R_n=0) + 1P(R_n=1) = P(R_n=1). \text{ Ainsi, } R_n \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } r_n.$$

On a ainsi $r_1 = P(R_1=1) = p$, probabilité que le composant tombe en panne à l'instant 1, et donc qit une durée de vie de 1.

De plus, utilisant la formule des probabilités complètes avec le système complet d'événements (de probabilité non nulle) $\{(R_1=0), (R_1=1)\}$, on a

$$r_2 = P(R_2=1) = P(R_1=0)P(R_2=1/R_1=0) + P(R_1=1)P(R_2=1/R_1=1).$$

Or $P(R_2=1/R_1=0) = 1$, car sachant que le composant ne tombe pas en panne à l'instant 1, il tombe en

panne à l'instant 2 de façon certaine car la durée de vie d'un composant est 1 ou 2 ; de façon analogue

$P(R_2=1/R_1=1) = p$, car sachant que le composant tombe en panne à l'instant 1, il est instantanément remplacé et la probabilité que ce nouveau composant tombe en panne à l'instant 2 est égale à la probabilité que sa durée de vie soit 1.

$$\text{On en déduit que } r_2 = (1-p) \times 1 + p \times p = p^2 - p + 1.$$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) Utilisant la formule des probabilités complètes avec le système complet d'événements (de probabilité non nulle) $\{(R_{n+1}=0), (R_{n+1}=1)\}$, on a

$$\begin{aligned} P(R_{n+2}=1) &= P(R_{n+1}=0)P(R_{n+2}=1/R_{n+1}=0) + P(R_{n+1}=1)P(R_{n+2}=1/R_{n+1}=1) \\ &= (1-P(R_{n+1}=1)) \times 1 + P(R_{n+1}=1) \times p = (p-1)P(R_{n+1}=1) + 1. \end{aligned}$$

De façon analogue, on obtient $P(R_{n+1}=1) = (p-1)P(R_n=1) + 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(R_{n+2}=1) &= pP(R_{n+1}=1) - P(R_{n+1}=1) + 1 = pP(R_{n+1}=1) - ((p-1)P(R_n=1) + 1) + 1 \\ &= pP(R_{n+1}=1) + (1-p)P(R_n=1). \end{aligned}$$

b) On a déjà remarqué que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = P(R_n=1)$. On en déduit donc que $r_{n+2} = pr_{n+1} + (1-p)r_n$.

3) a) La suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est (EC) $r^2 - pr + p - 1 = 0$, équation polynomiale de degré 2. Le discriminant du polynôme $r^2 - pr + p - 1$ est $\Delta = (-p)^2 - 4 \times 1 \times (p - 1) = p^2 - 4p + 4 = (p - 2)^2 > 0$,

donc (EC) admet les deux solutions réelles $r_1 = \frac{p - \sqrt{(p - 2)^2}}{2 \times 1} = \frac{p - |p - 2|}{2 \times 1} = \frac{p + p - 2}{2} = p - 1$ et

$$r_2 = \frac{p + \sqrt{(p - 2)^2}}{2 \times 1} = \frac{p + |p - 2|}{2 \times 1} = \frac{p + 2 - p}{2} = 1.$$

Ainsi, il existe deux constantes A et B telles que pour tout entier naturel n non nul,

$$r_n = A(p - 1)^n + B(1)^n = B + A(p - 1)^n.$$

D'après 1)b), on a $r_1 = B + A(p - 1) = p$ et $r_2 = B + A(p - 1)^2 = p^2 - p + 1$. En calculant $r_2 - r_1$, on trouve $A(p - 1)(p - 2) = p^2 - 2p + 1 = (p - 1)^2$, d'où $A = \frac{p - 1}{p - 2}$. De r_1 on déduit alors $B = \frac{1}{2 - p}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $r_n = \frac{1}{2 - p} + A(p - 1)^n = \frac{1}{2 - p} + \frac{p - 1}{p - 2}(p - 1)^n$

b) Comme p vérifie $0 < p < 1$, on a $-1 < p - 1 < 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p - 1)^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{2 - p} = \frac{1}{E(T)}.$$

4) Soit n un entier naturel non nul.

A chaque instant i compris entre 1 et n , la variable aléatoire R_i indique s'il y a une panne ($R_i = 1$) ou pas ($R_i = 0$). Il est donc clair que le nombre de pannes survenues jusqu'à l'instant n inclus est donné par

$$U_n = \sum_{i=1}^n R_i.$$

On en déduit que $E(U_n) = E\left(\sum_{i=1}^n R_i\right) = \sum_{i=1}^n E(R_i)$ (par linéarité de l'espérance mathématique).

$$\text{Ainsi, on a } E(U_n) = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2 - p} + \frac{p - 1}{p - 2}(p - 1)^i \right) = \frac{n}{2 - p} + \frac{p - 1}{p - 2}(p - 1) \frac{1 - (p - 1)^n}{1 - (p - 1)}$$

$$\text{et donc } E(U_n) = \frac{n}{2 - p} - \frac{(p - 1)^2}{(2 - p)^2} (1 - (p - 1)^n).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p - 1)^n = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(p - 1)^2}{(2 - p)^2} (1 - (p - 1)^n) = \frac{(p - 1)^2}{(2 - p)^2}$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2 - p} = +\infty$.

On en déduit que $E(U_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2 - p}$.